www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

EXPOSÉ DU PROBLÈME TRAITÉ

Le problème consiste en l'étude du mouvement d'un corps matériel solide indéformable S tournant autour d'un point O, ce point pouvant se déplacer à la surface d'une sphère T représentant la terre. S peut représenter, par exemple, un gyroscope ou un pendule.

On supposera que T est une sphère pleine, de rayon R, dont la densité de matière ne dépend que de la distance à son centre O_0. Alors l'accélération de la pesanteur à sa surface est constante en module, égale à g, et dirigée vers O_0.

De plus, les dimensions de S étant négligeables devant celles de T, on supposera que l'accélération de la pesanteur exercée par T sur S ne dépend pas du point P de S considéré et est égale (en module et en direction) à celle exercée en O.

S est lié au point O, supposé sans masse, par une liaison rotule parfaite, O étant soumis à l'action de S et à une force extérieure $\vec{F}$ destinée à assurer le maintien et le déplacement de O à la surface de T.

REPÈRES, PRÉCISIONS ET NOTATIONS UTILISÉS (voir figures)

Les repères utilisés sont tous orthonormés directs, t désigne le temps.

On utilisera comme repère galiléen $\mathscr{R}_0$ le repère $(O_0; \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$, les vecteurs $\vec{x_0}$, $\vec{y_0}$, $\vec{z_0}$ étant dirigés suivant des directions fixes. $\vec{z_0}$ est parallèle et de même sens que $\overrightarrow{O_0N}$, N étant le pôle Nord de T (cette direction est supposée fixe).

On utilisera le repère $\mathscr{R}'_0$ $(O; \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ d'origine O et d'axes parallèles à ceux de $\mathscr{R}_0$.

Il sera aussi utile de considérer une sphère T_0 coïncidant avec T (même centre et même rayon) mais fixe par rapport à $\mathscr{R}_0$. Sur T_0, on définit la position du point O par ses coordonnées sphériques sur T_0, ici $\| \overrightarrow{O_0O} \| = R$, sa position dépend des angles L et l:

si o est la projection de O sur le plan $(O_0; \vec{x_0}, \vec{y_0})$, alors :

$L = (\vec{x_0}, \overrightarrow{O_0o})$ mesuré autour de $\vec{z_0}$;

$|l| = |(\overrightarrow{O_0o}, \overrightarrow{O_0O})| \in [0, \pi/2]$;

$l > 0$ si O est dans l'hémisphère Nord, $l < 0$ sinon.

On note $\omega \vec{z_0}$, où ω est une constante, le vecteur rotation instantanée de T par rapport à $\mathscr{R}_0$.

On note $\mathscr{R}$ le repère $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, repère principal d'inertie de S en O, A, B, C étant les trois moments d'inertie correspondants, et on suppose qu'ici $A = B \neq 0, C \neq 0$.

La position de $\mathscr{R}$ par rapport à $\mathscr{R}'_0$ est définie par les trois angles d'Euler ψ, θ, φ usuels, on choisit un vecteur unitaire $\vec{u}$ parallèle à l'intersection des deux plans $(O; \vec{x_0}, \vec{y_0})$ et $(O; \vec{x}, \vec{y})$. Alors :

$\psi = (\vec{x_0}, \vec{u})$ mesuré autour de $\vec{z_0}$.

$\theta = (\vec{z_0}, \vec{z})$ mesuré autour de $\vec{u}$.

$\varphi = (\vec{u}, \vec{x})$ mesuré autour de $\vec{z}$.

On appelle $\mathscr{R}_1$ le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ où $\vec{v} = \vec{z} \wedge \vec{u}$.

On note (v_x^0, v_y^0, v_z^0) les composantes dans $\mathscr{R}$ de la vitesse $\vec{V}(O/\mathscr{R}_0)$ de O par rapport à $\mathscr{R}_0$.

On suppose de plus que S a son centre d'inertie G situé sur l'axe $(O; \vec{z})$ et l'on note $\overrightarrow{GO} = d\vec{z}$ où d est une constante.

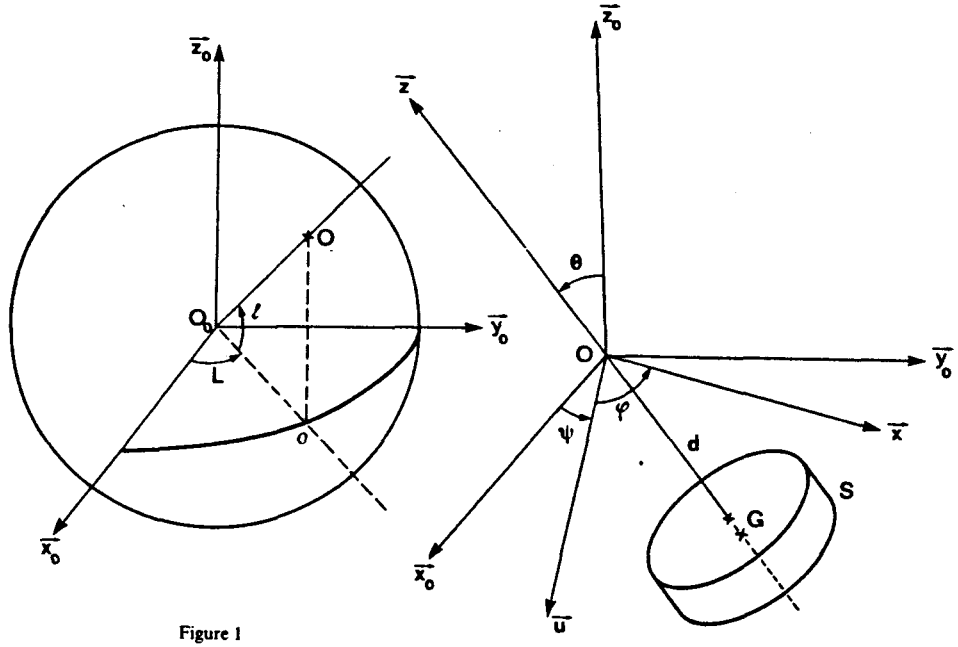

Figure 1

Figure 2

On notera m la masse de S et $\vec{\Omega}$ de composantes (p, q, r) dans $\mathscr{R}$ son vecteur rotation instantanée par rapport à $\mathscr{R}_0$.

$\vec{F}$ a pour composantes (F_x, F_y, F_z) dans $\mathscr{R}$, on notera $\vec{P}$ de composantes (P_x, P_y, P_z) dans $\mathscr{R}$ la résultante des efforts de pesanteur agissant sur S.

M désignera un point quelconque de S.

I. ÉTUDE PRÉLIMINAIRE

1. Donner la définition d'une liaison rotule parfaite. Que peut-on en déduire sur les efforts exercés par O sur S ?

2. Faire l'analyse des efforts extérieurs s'exerçant sur S ; on les définira par leur résultante et leur moment en O.

3. Déterminer le moment cinétique en O de S par rapport à $\mathscr{R}'_0$ et le moment dynamique en O de S par rapport à $\mathscr{R}'_0$; on exprimera leurs composantes dans $\mathscr{R}$.

4. M étant un point quelconque de S, $\mathscr{R}'_0$ le repère relatif, déterminer, en fonction de $\vec{\Gamma}(O/\mathscr{R}_0)$ (accélération de O par rapport à $\mathscr{R}_0$) et de $\vec{\Gamma}(M/\mathscr{R}'_0)$ (accélération de M par rapport à $\mathscr{R}'_0$), l'accélération d'entraînement et l'accélération absolue de M.

   En déduire l'expression du moment dynamique en O de S par rapport à $\mathscr{R}_0$ en fonction du moment dynamique en O de S par rapport à $\mathscr{R}'_0$, m, $\overrightarrow{OG}$ et $\vec{\Gamma}(O/\mathscr{R}_0)$.

Tournez la page S.V.P.

5. En déduire par application du principe fondamental de la dynamique trois équations du mouvement de S. Quelle intégrale première peut-on écrire ?

6. Déterminer l'énergie cinétique du mouvement de S par rapport à $\mathscr{R}_0$ en fonction des données du problème.

   Exprimer la puissance totale $\mathscr{P}$ des efforts agissant sur S dans son mouvement, ceci en fonction des données du problème et des composantes dans $\mathscr{R}$ de $\vec{P}$ et de $\vec{V}(O/\mathscr{R}_0)$.

7. On considère le cas où S est un disque plein homogène d'axe $(O;\vec{z})$ de rayon ρ et d'épaisseur e, déterminer les moments d'inertie A, B, C de S.

   Application numérique : $e = 0{,}03$ m, $\rho = 0{,}20$ m, $m = 30$ kg.

   Calculer numériquement l'expression de A et C en fonction de d.

II. ÉTUDE DE MOUVEMENTS PARTICULIERS

Nous étudions dans cette partie les mouvements de S qui conservent l'axe $(O;\vec{z})$ vertical (donc parallèle à $\overrightarrow{O_0O}$).

1. Montrer que dans ce cas les valeurs de ψ et θ déterminent la position de O sur T_0. Calculer en fonction de R, ψ et θ les composantes de $\overrightarrow{O_0O}$ dans $\mathscr{R}_0$.

2. Montrer que l'on peut exprimer les composantes dans $\mathscr{R}$ de $\vec{V}(O/\mathscr{R}_0)$ (vitesse de O par rapport à $\mathscr{R}_0$) et $\vec{\Gamma}(O/\mathscr{R}_0)$ (accélération de O par rapport à $\mathscr{R}_0$) en fonction des composantes de $\vec{\Omega}$ dans $\mathscr{R}$ et de leurs dérivées par rapport au temps.

3. Écrire dans ce cas les trois équations du mouvement de S.

4. On considère le cas où $A - d\,m\,R \neq 0$.

   a. Résoudre le système des trois équations différentielles obtenues qui sont linéaires par rapport à p, q.

   Que peut-on dire de $|\vec{\Omega}|$?

   b. Écrire alors le système d'équations différentielles vérifiées par ψ, θ et φ.

   Montrer que le système précédent admet des solutions particulières où θ et $\dot{\varphi}$ $\left(\dot{\varphi} = \dfrac{d\varphi}{dt}\right)$ sont constants ; les calculer. À quel mouvement de O cela correspond-il sur T_0 ? Peut-on en déduire par des considérations géométriques une famille à trois paramètres de solutions pour le mouvement de O sur T_0 ?

5. Si $A - d\,m\,R = 0$.

   Résoudre le système des trois équations du mouvement.

   Que peut-on dire concernant p et q si $r = 0$? Dans ce cas, montrer que S est «imperturbable» (c'est-à-dire que $\vec{z}$ reste vertical) quel que soit la mouvement de O imposé par $\vec{F}$. (Pendule de Schüler.)

6. Calculer l'expression numérique $A - d\,m\,R$ et $A - d\,m\,R - C$ pour les valeurs données au I.7. ; que pensez-vous de la valeur de d trouvée pour que l'égalité $A - d\,m\,R = 0$ soit vérifiée ?

7. Nous allons appliquer l'étude précédente au cas où O est lié à T et entraîné dans son mouvement de rotation. On suppose de plus que $\psi = 0$ pour $t = 0$.

   a. Déterminer l'expression de ψ et θ en fonction de t.

   b. Si $\varphi = 0$ (donc constant) que peut-on dire du mouvement de S par rapport à T ? Calculer $\vec{\Omega}$. En déduire la condition sur les paramètres de S rendant cette solution possible quel que soit O lié à T.

   c. Si $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ (donc constant), calculer $\vec{\Omega}$. En déduire la relation liant $\dot{\varphi}_0$ aux paramètres de S pour que cette solution soit possible. Cette valeur $\dot{\varphi}_0$ existe-t-elle toujours ?

   Application numérique : calculer $\dot{\varphi}_0$ pour les valeurs numériques du I.7. avec $d = 0{,}1$ m et $R = 6\,400$ km.

III. ÉTUDE À L'AIDE DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE ET PERTURBATIONS

1. Écrire l'expression de $\mathscr{P}$, puissance totale des efforts agissant sur S dans son mouvement, en faisant intervenir les composantes dans $\mathscr{R}_1$ notées P_u, P_v, P_z de la résultante $\vec{P}$ des efforts de pesanteur agissant sur S et les composantes v_u^0, v_v^0, v_z^0 de $\vec{V}(O/\mathscr{R}_0)$ dans $\mathscr{R}_1$.

2. Écrire alors les trois équations de Lagrange correspondant à ψ, θ, φ.

3. Que deviennent ces équations si l'on cherche des solutions où l'axe $(O;\vec{z})$ reste vertical (comme dans l'étude de la partie II) ?

   Retrouver le résultat obtenu au II.7.*c*.

4. On considère le point O lié à T et entraîné dans son mouvement de rotation, et on veut étudier les petits mouvements au voisinage de la solution trouvée dans II.7.*c*. Le point O est déterminé par la donnée des angles L et l et on suppose que pour $t = 0$ on a $L = 0$.

   a. Pour la solution trouvée au II.7.*c*. nous avions :

   $$\psi = \psi_0(t) \qquad \theta = \theta_0 \qquad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right).$$

   Donner les valeurs de $\psi_0(t)$, θ_0 et $\dot{\varphi}_0$ trouvées.

   b. On introduit trois paramètres supposés petits $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ tels que $\psi = \psi_0 + \alpha$, $\theta = \theta_0 - \beta$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + \gamma$.

   Déterminer alors P_u, P_v, P_z en approximation linéaire.

   c. Que valent en approximation linéaire les composantes de $V(O/\mathscr{R}_0)$ dans $\mathscr{R}_1$?

   En déduire les équations différentielles approchées vérifiées par α, β, γ et leurs dérivées.

   d. Étudier la stabilité dans le cas $l = 0$ (O placé sur l'équateur de T). Que peut-on en déduire dans le cadre des données numériques du I.7. avec $R = 6\,400$ km ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail